Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 = 6$ și $a_2 = 12$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 4$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3^x - 1)(3^x - 3) = 0$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cifra 1.
5p	**5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB = 2$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
5p	**6.** Calculați aria triunghiului isoscel ABC știind că $A = \frac{\pi}{2}$ și $AC = 4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
5p	**c)** Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ știind că $A(1)\cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
	2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Calculați $f(1)$.
5p	**b)** Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.
5p	**c)** Determinați numărul real m știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Arătați că $f(x) \leq \frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{11}{6}$.
5p	**b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$. Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Determinați numărul real pozitiv a știind că $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}\,dx = \ln 3$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculați z^2.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$ **nu** intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x-3)=\log_2(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** În triunghiul ABC punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, AC. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg} a=\sqrt{3}$ și $a\in\mathbb{R}$, arătați că $\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=2-\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 1 & 2 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\big(A(1)\big)=-1$.

5p **b)** Determinați numerele reale m știind că $\det\big(A(m)\big)=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A\left(a^2\right)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -5\\ 1 & -5 & 5\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3x+3y-xy-6$.

5p **a)** Calculați $1*3$.

5p **b)** Arătați că $x*y=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x \text{ de } 2014 \text{ ori}}=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(x-3)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\dfrac{e^2+1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real x știind că numerele 2, 4 și $x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+4$ este situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$ și $B(1,2)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq-\frac{1}{4}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că $1+i$ este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Pentru $a=3$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_2=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z = 1 + 2i + 3i^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-x} = 3^{2x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 și 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC} = (m+1)\vec{i} + 4\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numărul real m știind că $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 3$ și $BC = 3\sqrt{2}$. Determinați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 1$.

5p **b)** Arătați că $A(x+y) = A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x știind că $A(x^2+2) = A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2) = 2(a-3)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că polinomul f este divizibil prin $X^2 - X + 1$.

5p **c)** Pentru $a = 3$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(2^x) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{xe^x}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că ecuația $f(x) = 1$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,2)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1 = 1 - \ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1} \le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.

5p **2.** Arătaţi că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$ este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2+4}=5^{4x}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 3, 5 şi 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ şi $C(4,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinaţi numărul natural n știind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-3X+2$.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-4.

5p **c)** Arătați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=20$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+x+1)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)-x+1)\,dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5p **c)** Arătaţi că $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 5$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(3,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a - x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^{4-x} = 2^{2x+2}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul M şi are panta egală cu 2.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5$, $AC = 12$ și $BC = 13$. Arătaţi că $\sin C = \frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1)) = 2$.

5p **b)** Arătaţi că $A(x)A(y) = A(xy + x + y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x) = A(7)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m = 1$, arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul natural prim m, știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$.

5p **b)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ și $x = e$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^e \frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx = \frac{1}{2015}$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1=1$ și $a_2=2015$.
5p	**2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-8x\right)=\log_3 9$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(6,3)$ și $C(4,0)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.
5p	**6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB=1$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&a+1\\0&1&a+2\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a, știind că $A^2(a)-2A(a)+I_3=O_3$, unde $A^2(a)=A(a)A(a)$.
5p	**c)** Arătați că $A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(100)=50A(51)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0)=2$.
5p	**b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1=x_2+x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Pentru $m=8$, arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $e^x(x-3)^2\le 4e$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx$.
5p	**a)** Arătați că $I_1=\frac{3}{4}$.
5p	**b)** Arătați că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Demonstrați că $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=12$.

5p **2.** Calculați produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2-4x+4\right)=0$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 2, 3 și 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(2,3)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6**. Arătați că $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ 3x & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(B(0)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B\left(x^2+1\right)B(x)=B\left(x^2+x+1\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Determinaţi numerele naturale n pentru care $n\circ n=11$.

5p **c)** Calculaţi $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătați că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 1-3i$. Arătați că numărul z_1+z_2 este real.

5p **2.** Calculați $(f \circ g)(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-64=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=4x+1$ și punctul $A(2,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi-x)\sin x-\cos(\pi-x)\cos x=1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=3B(x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x)=B\left(x^2+x-2\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=m$.

5p **b)** Pentru $m=-1$, demonstrați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+2x\right)dx=e-1$

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=e-3$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}\left(3e^2-19\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și $a_2=4$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x-2}=3^{2-x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și are panta egală cu 1.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=10$, $AC=10$ și $BC=12$. Arătați că $\sin B=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-m & 1 & 1\\ 1 & -m & 1\\ 1 & 1 & -m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}-mx+y+z=-1\\ x-my+z=-1\\ x+y-mz=m\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$.

5p **c)** Pentru $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0+2y_0+3z_0=9$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-2xy+10x+10y-45$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n, pentru care $m*n=27$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$.

5p **a)** Arătați că $\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\ln 2$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)dx\right)=1$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2016$ și rația $r = 2$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1,2,3,\ldots,40\}$, acesta să conțină cifra 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$ și $B(4,5)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Dacă $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{4}{5}$, arătați că $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right) = -2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori } a} = 3^{2015} - 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, $x \in (1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2) + f'(3) + f'(4) + \ldots + f'(n)\right) = -\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \sqrt{x}\, f(x)\, dx = \frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{e^2} \left(f(x) - \sqrt{x} \right) \ln x \, dx = 4$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a > 1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1, a] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\pi \left(\ln a + \frac{7}{2} \right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numărul real a, știind că numerele 24, 1020 și a sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$ este tangentă axei Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=27$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, acesta să fie număr rațional.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(-2,-1)$ și $C(2,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta BC.
5p	**6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $m(\sphericalangle A)=45°$ şi $BC=2\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(0))=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq-1$ și $a\neq\frac{1}{3}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.
5p	**a)** Arătaţi că $x*y=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*x=1$.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$.

2. Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx$.

5p **a)** Arătaţi că $I_0 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$.

5p **b)** Demonstraţi că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Arătaţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=22$.
5p	**2.** Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-6x+6\right)=\log_3 1$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$ și $B(1,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.
5p	**6**. Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a\neq-1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde m este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Pentru $m=3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x-1)$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$.

5p **b)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria egală cu e.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=0$.