Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3=18$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=36$	**3p**
2.	$x_V=-1$	**2p**
	$y_V=3$	**3p**
3.	$3^x=1$ sau $3^x=3$	**2p**
	$x=0$ sau $x=1$	**3p**
4.	Sunt 18 numere de două cifre care conțin cifra 1, deci sunt 18 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{18}{90}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	**2p**
	ΔABC echilateral $\Rightarrow AC=2$	**3p**
6.	ΔABC dreptunghic isoscel $\Rightarrow AB=4$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{4\cdot 4}{2}=8$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&a&a\\a&2&2\\a&a&2\end{vmatrix}=(a-2)^2(a+2)$	**3p**
	$(a-2)^2(a+2)=0\Leftrightarrow a=-2$ sau $a=2$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+y+z=4\\x+2y+2z=5\\x+y+2z=4\end{cases}$	**2p**
	$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1+m=$	**2p**
	$=m+2$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2\cdot 3=-2$	**3p**

c)	$\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3m=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3m-10\Rightarrow m=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(e)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,e)$ și $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(e,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\le f(e)\Rightarrow f(x)\le\dfrac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{11}{6}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int\limits_0^1\dfrac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge 0, x-1\le 0$ și $x^2+x+1>0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	$\int\limits_0^a\dfrac{2x+1}{f(x)}dx=\int\limits_0^a\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left.\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)\right\|_0^a=\ln\left(a^2+a+1\right)$	**3p**
	$\ln\left(a^2+a+1\right)=\ln 3\Leftrightarrow a^2+a+1=3$ care are soluția pozitivă $a=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=$	**2p**
	$=2i$	**3p**
2.	$\Delta=16-24=-8$	**3p**
	$\Delta<0$, deci parabola asociată funcției f **nu** intersectează axa Ox	**2p**
3.	$2x-3=x+1$	**2p**
	$x=4$ care verifică ecuația	**3p**
4.	Sunt 45 de numere impare de două cifre, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$	**3p**
6.	$\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=\dfrac{\cos a\left(\frac{\sin a}{\cos a}-1\right)}{\cos a\left(1+\frac{\sin a}{\cos a}\right)}=\dfrac{\mathrm{tg}a-1}{1+\mathrm{tg}a}=$	**3p**
	$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+2+2-1-4-1=-1$	**3p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&m&2\\1&2&m\end{vmatrix}=m^2-2m$	**3p**
	$m^2-2m=0\Leftrightarrow m_1=0$ și $m_2=2$	**2p**
c)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}3&a+3&a+3\\a+3&a^2+5&4a+1\\a+3&4a+1&a^2+5\end{pmatrix}$, $A(a^2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a^2&2\\1&2&a^2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2&a+2&a+2\\a+2&5&4a-1\\a+2&4a-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=-1$	**2p**

2.a)	$1*3=3\cdot 1+3\cdot 3-1\cdot 3-6=$ $=3$	**3p** **2p**
b)	$x*y=3-xy+3x+3y-9=$ $=3-x(y-3)+3(y-3)=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$3-(x-3)^{2014}=x$ $x_1=3$ și $x_2=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x-2)'(x^2-4x+5)-(x-2)(x^2-4x+5)'}{(x^2-4x+5)^2}=$ $=\dfrac{-x^2+4x-3}{(x^2-4x+5)^2}=\dfrac{(1-x)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}=0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=3$ $f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,3]$ $f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	$I_1=\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx=$ $=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2+1}{4}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x-1)\ln^n x\,dx$ Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[1,e]$ avem $\ln x\ge 0$ și $\ln x-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int_1^e x\ln^{n+1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}(n+1)\ln^n x\,dx=$ $=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,dx\Rightarrow 2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot(x+5)=4^2$	**2p**
	$x=3$	**3p**
2.	$\Delta=1-16=-15$	**2p**
	$a=1>0$ și $\Delta<0\Rightarrow$ parabola asociată funcţiei f este situată deasupra axei Ox	**3p**
3.	$x^2-1=8\Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x_1=-3$ și $x_2=3$	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre care au suma cifrelor egală cu 7, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	$M(0,3)$	**2p**
	$OM=3$	**3p**
6.	$x=\dfrac{\pi}{6}$	**2p**
	$\sin 2x=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&2x&0\\0&4x+1&0\\0&3x&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2y&0\\0&4y+1&0\\0&3y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2x+2y+8xy&0\\0&4x+4y+16xy+1&0\\0&3x+3y+12xy&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&2(x+y+4xy)&0\\0&4(x+y+4xy)+1&0\\0&3(x+y+4xy)&1\end{pmatrix}=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=I_3\Rightarrow A\left(2x+4x^2\right)=A(0)\Rightarrow 2x+4x^2=0$	**3p**
	$x_1=0$ și $x_2=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-4\cdot0+2a=$	**2p**
	$=2a$	**3p**
b)	$x_1=1+i\Rightarrow x_2=1-i$	**1p**
	$x_1+x_2+x_3=-1\Rightarrow x_3=-3$	**2p**
	$x_1x_2x_3=-2a\Rightarrow a=3$	**2p**

c)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(1+i)^3+(1-i)^3+(-3)^3=$ $=(2i-2)+(-2i-2)-27=-31$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x^2)'\cdot(x-2)-x^2\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$ $=\dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**2p** **3p**
b)	$y-f(4)=f'(4)(x-4)$ $f(4)=8$, $f'(4)=0$, deci ecuația tangentei este $y=8$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$ $f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(2,4]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(2,4]$ $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$I_2=\int_0^1\dfrac{x^2}{x^3+1}dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1\dfrac{3x^2}{x^3+1}dx=$ $=\dfrac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{3}\ln 2$	**2p** **3p**
b)	$I_{n+3}+I_n=\int_0^1\dfrac{x^{n+3}}{x^3+1}dx+\int_0^1\dfrac{x^n}{x^3+1}dx=\int_0^1\dfrac{x^n\left(x^3+1\right)}{x^3+1}dx=$ $=\int_0^1 x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n	**3p** **2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge 0,\ x^3+1>0\Rightarrow I_n\ge 0$ $I_{n+3}\ge 0$ și $I_{n+3}+I_n=\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=-2+2i$	**2p**
	Partea reală a numărului z este egală cu -2	**3p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x-1=3x-5$	**3p**
	$x=2$ și $y=1$	**2p**
3.	$x^2-x=2x\Leftrightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x_1=0$ și $x_2=3$	**2p**
4.	Cifra unităților poate fi 0 sau 2	**2p**
	Cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $3\cdot 2=6$ numere	**3p**
5.	$(m+1)\vec{i}+4\vec{j}=2\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)$	**2p**
	$m=5$	**3p**
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel	**3p**
	$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x+y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2(x+y)^2-2(x+y)&4(x+y)&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\2x^2+4xy+2y^2-2x-2y&4x+4y&1\end{pmatrix}=A(x+y)$ pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)=A(3x)$	**2p**
	$x^2+2=3x\Rightarrow x_1=1$ și $x_2=2$	**3p**
2.a)	$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+a\cdot 2-2=$	**2p**
	$=2a-6=2(a-3)$	**3p**
b)	$f=(X-2)\left(X^2-X+1\right)+(a-3)X$	**3p**
	$a=3$	**2p**

c)	$f=(X-2)\left(X^2-X+1\right)$	**2p**
	$\left(2^x-2\right)\left(2^{2x}-2^x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(xe^x\right)'\cdot(x+2)-xe^x\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)\cdot(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=0$, $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, deci ecuaţia tangentei este $y=\dfrac{1}{2}x$	**3p**
c)	Funcţia $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-1$ este continuă pe $[1,2]$	**2p**
	$g(1)\cdot g(2)=\dfrac{e-3}{3}\cdot\dfrac{e^2-2}{2}<0$, deci există $c\in(1,2)$ astfel încât $g(c)=0$, adică $f(c)=1$	**3p**
2.a)	$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=$	**2p**
	$=x\Big\vert_0^1-\ln(1+x)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\left(\frac{x}{1+x^{n+1}}-\frac{1}{1+x^n}\right)dx=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{\left(1+x^n\right)\left(1+x^{n+1}\right)}dx$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,1]$ avem $x-1\le 0$, $x^n\ge 0$, $1+x^n>0$ şi $1+x^{n+1}>0$, deci $I_{n+1}-I_n\le 0$	**3p**
c)	Pentru orice $x\in[0,1]$ şi orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $0\le\dfrac{x^n}{1+x^n}\le x^n$	**2p**
	$0\le\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^1 x^n dx\Rightarrow 0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, deci $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6+12i+2-12i=$ $=6+2=8$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=4-4=$ $=0$, deci parabola asociată funcției f este tangentă la axa Ox	**3p** **2p**
3.	$x^2+4=4x \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 3=12$ numere	**3p** **2p**
5.	Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow m_d=-2$ $d: y=-2x-2$	**2p** **3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A(n)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{n+1}&0\\0&2^{n+1}-1&1\end{pmatrix}$ $A(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^3&0\\0&2^3-1&1\end{pmatrix}$ și $A(n)\cdot A(1)=A(3)\Rightarrow n=2$	**3p** **2p**
c)	$A(p)\cdot A(q)=A(p+q)$ pentru orice numere naturale p și q $A(p+q)=A(pq)\Rightarrow p+q=pq\Rightarrow (p-1)(q-1)=1\Rightarrow p=q=0$ sau $p=q=2$	**2p** **3p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-3\cdot 0+2=$ $=2$	**3p** **2p**
b)	Câtul este $X+1$ Restul este $X+6$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-3$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=20$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(3x)'+\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=3+e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+e^x}{x}=3$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, deci dreapta de ecuație $y=3x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g'(0)=0$, $g'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,0)$ și $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-4x-1=e^x-x-1$	**3p**
	$g(x)\geq g(0)\Rightarrow g(x)\geq 0\Rightarrow f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)dx=\int\limits_0^1 x^3\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^4}{4}\Big\vert_0^1=\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\limits_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int\limits_0^t f(x)dx\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{4t^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^3}{4t^3\left(t^2+t+1\right)}=\frac{1}{4}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=5-2=3$ $a_3=5+3=8$	**3p** **2p**
2.	$f(3)=5 \Leftrightarrow a-3=5$ $a=8$	**3p** **2p**
3.	$2^{3(4-x)}=2^{2x+2} \Leftrightarrow 12-3x=2x+2$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 9 numere naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 0, deci sunt 9 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$y-y_M=2(x-x_M)$ $y=2x-1$	**2p** **3p**
6.	$13^2=5^2+12^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A $\sin C=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{5}{13}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**2p** **3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy&0&(1-x)2y+2x(1+2y)\\0&1&0\\-x(1-y)-(1+2x)y&0&-2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1-(xy+x+y)&0&2(xy+x+y)\\0&1&0\\-(xy+x+y)&0&1+2(xy+x+y)\end{pmatrix}=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
c)	$A(x)A(x)A(x)=A\left((x+1)^3-1\right)$, pentru orice număr real x $(x+1)^3-1=7 \Leftrightarrow x=1$	**3p** **2p**
2.a)	$f(0)=0^3+2\cdot 0^2+0+m=$ $=0+0+0+m=m$	**3p** **2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(x_1+x_2+x_3\right)-3=-2\left((-2)^2-2\cdot 1\right)-(-2)-3=-5=5x_1x_2x_3$	**2p**
c)	$x_1\in\mathbb{Z}$ și $f\left(x_1\right)=0\Leftrightarrow m=-x_1\left(x_1+1\right)^2$	**2p**
	Deoarece m este prim, obținem $\left(x_1+1\right)^2=1\Leftrightarrow x_1=0$, care nu convine, sau $x_1=-2$, pentru care $m=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'=$	**3p**
	$=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f''(x)=-\frac{x'\sqrt{x^2+1}-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=-\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f''(x)<0$, pentru orice număr real x, deci funcția f' este descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^e\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^e\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=e-x\Big\vert_1^e=e-e+1=1$	**2p**
c)	$\int_1^e\frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^n x\,dx=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e=\frac{1}{n+1}$	**3p**
	$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2015}\Leftrightarrow n=2014$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_2 - a_1 = 2015 - 1 =$	**3p**
	$= 2014$	**2p**
2.	Valoarea maximă a funcției f este $f(4) =$	**3p**
	$= 4 + 1 = 5$	**2p**
3.	$x^2 - 8x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$	**3p**
	$x_1 = -1$ și $x_2 = 9$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 4 moduri, a doua cifră se poate alege în câte 3 moduri	**2p**
	Ultima cifră se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 2 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ de numere	**3p**
5.	$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow x_D = 1$	**3p**
	$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow y_D = 0$	**2p**
6.	$A = \frac{\pi}{2}$	**2p**
	$BC = 2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	**3p**
b)	$A^2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 + 4a + 2 \\ 0 & 1 & 2a + 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 2a + 2 \\ 0 & 2 & 2a + 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	**2p**
	$A^2(a) - 2A(a) + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 + 2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**1p**
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 + 2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a_1 = -2$ și $a_2 = 0$	**2p**
c)	$A(2) + A(100) = 2A(51)$, $A(4) + A(98) = 2A(51)$, ..., $A(50) + A(52) = 2A(51)$	**3p**
	$A(2) + A(4) + A(6) + \ldots + A(100) = 25 \cdot 2A(51) = 50A(51)$	**2p**

2.a)	$f(0)=0^3-4\cdot 0^2+m\cdot 0+2=$ $=2$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1=x_2+x_3 \Leftrightarrow x_1=2$ $f(2)=0 \Leftrightarrow 2m-6=0 \Leftrightarrow m=3$	**2p** **3p**
c)	$f=X^3-4X^2+8X+2$, $x_1+x_2+x_3=4$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8$ Cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=16-16=0$, dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $f(0)=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)+e^x(2x-6)=$ $=e^x\left(x^2-6x+9+2x-6\right)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=3$ $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$ $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$ $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
c)	$f(x)\leq f(1)$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$ Cum $f(1)=4e$, obținem $e^x(x-3)^2\leq 4e$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**3p** **2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\left(1-x^3\right)dx=\left.\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\right\|_0^1=$ $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(-x^3\right)\left(1-x^3\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n Pentru orice număr natural nenul n și $x\in[0,1]$ avem $-x^3\leq 0$ și $\left(1-x^3\right)^n\geq 0 \Rightarrow I_{n+1}\leq I_n$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int_0^1 x'\left(1-x^3\right)^{n+1}dx=\left.x\left(1-x^3\right)^{n+1}\right\|_0^1-\int_0^1 x(n+1)\left(1-x^3\right)^n\left(-3x^2\right)dx=$ $=3(n+1)\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^n dx=-3(n+1)\int_0^1\left(1-x^3-1\right)\left(1-x^3\right)^n dx=-3(n+1)\left(I_{n+1}-I_n\right)$, deci $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **<u>Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.</u>**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}$	**2p**
	$\left(\sqrt{5}-1\right)^2=6-2\sqrt{5}\Rightarrow\left(6+2\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)=12$	**3p**
2.	$f(3)=0$	**3p**
	$f(1)f(2)f(3)f(4)=0$	**2p**
3.	$x^2-4x+4=1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**2p**
	$x_1=1$ și $x_2=3$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 3	**2p**
	Numerele sunt 243 și 423, deci se pot forma două astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d\cdot m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=-x+3$	**2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$	**2p**
	$\sin(\pi+x)=-\sin x\Rightarrow\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=\sin x-\sin x=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\3y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3x+3y&0&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&0&\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\3\cdot\frac{x+y}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$B\left(x^2+1\right)B(x)=\begin{pmatrix}3x^3+3x+1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&3x^3+3x+1\end{pmatrix}$, $B\left(x^2+x+1\right)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3\left(x^2+x+1\right)&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$3x^3+3x+1=1\Leftrightarrow x=0$	**2p**

2.a)	$(-3)\circ 3=\frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3=$	**3p**
	$=0+3=3$	**2p**
b)	$n\circ n=\frac{1}{2}(n-3)^2+3$	**2p**
	$(n-3)^2=16\Leftrightarrow n_1=-1$, care nu convine, și $n_2=7$, care convine	**3p**
c)	$x\circ 3=3$ și $3\circ y=3$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015=(1\circ 2)\circ 3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3\circ(4\circ 5\circ\ldots\circ 2015)=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{6}{(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$	**2p**
c)	$f'(x)=-3\Leftrightarrow(x-1)^2=1$	**3p**
	Cum $x\in(1,+\infty)$, coordonatele punctului sunt $x=2$ și $y=4$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\frac{1}{x}f(x)dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=0\Rightarrow c=0$, deci $F(x)=(x-1)e^x$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=\left(x^{n+1}e^x\right)\Big\vert_0^1-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx=$	**3p**
	$=e-(n+1)I_{n-1}$, deci $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=(2+3i)+(1-3i)=$	**3p**
	$=3$, care este număr real	**2p**
2.	$g(1)=3$	**2p**
	$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=2$	**3p**
3.	$4^x=4^3$	**2p**
	$x=3$	**3p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 13 numere naturale de două cifre care sunt divizibile cu 7, deci sunt 13 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{13}{90}$	**2p**
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 4	**2p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y=4x-8$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)\sin x-\cos(\pi-x)\cos x=-\cos(\pi-x+x)=$	**3p**
	$=-\cos\pi=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-1-0-0=0$	**3p**
b)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}0&2x&0\\x&0&x\\0&2x&0\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}0&x&0\\2x&0&2x\\0&x&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}0&3x&0\\3x&0&3x\\0&3x&0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}=3B(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$B(x)B(x)B(x)=\begin{pmatrix}0&2x^3&0\\2x^3&0&2x^3\\0&2x^3&0\end{pmatrix}$ și $B\left(x^2+x-2\right)=\begin{pmatrix}0&x^2+x-2&0\\x^2+x-2&0&x^2+x-2\\0&x^2+x-2&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$2x^3=x^2+x-2,\ x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-2\cdot0^2+2\cdot0+m=$	**3p**
	$=0-0+0+m=m$	**2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, $x_1x_2x_3=1$	**3p**
	$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)}{x_1x_2x_3}=\frac{2\cdot 2}{1}=4$	**2p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2\cdot 2=0$	**2p**
	Dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $x_1+x_2+x_3=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=-2$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=-2x+1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2+x+1}\right)^x=$	**2p**
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2+x+1}}=e^{-2}$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(f(x)+2x)dx=\int_0^1 e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\vert_0^1=e-1$	**3p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x-x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(1)=e-3\Rightarrow c=-2$, deci $F(x)=e^x-x^2-2$	**3p**
c)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1(e^x-2x)^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-4xe^x+4x^2)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}-4(x-1)e^x+4\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^1=\frac{\pi(3e^2-19)}{6}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=4-1=3$	**2p**
	$a_4=1+3\cdot 3=10$	**3p**
2.	$f(1)=a\Rightarrow 1^2+4=a$	**3p**
	$a=5$	**2p**
3.	$3^{2(x-2)}=3^{2-x}\Leftrightarrow 2x-4=2-x$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 21 de numere naturale de două cifre care sunt mai mici sau egale cu 30, deci sunt 21 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{21}{90}=\dfrac{7}{30}$	**2p**
5.	$y-3=1\cdot(x-0)$	**3p**
	$y=x+3$	**2p**
6.	$AD=8$, unde $AD\perp BC$, $D\in BC$	**2p**
	$\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{4}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}-m&1&1\\1&-m&1\\1&1&-m\end{vmatrix}=(2-m)(m+1)^2$	**3p**
	Pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$, obținem $\det(A(m))\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**2p**
c)	Pentru $m=2$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1+\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $x_0+2y_0+3z_0=9\Leftrightarrow 1+\alpha+2(1+\alpha)+3\alpha=9\Leftrightarrow \alpha=1$, soluția sistemului care verifică relația este $(2,2,1)$	**2p**
2.a)	$x*y=-2xy+10x+10y-50+5=$	**2p**
	$=-2x(y-5)+10(y-5)+5=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x*5=5*y=5$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$((1*2*3*4)*5)*6*7*8*9*10=5*(6*7*8*9*10)=5$	**3p**
c)	$-2(m-5)(n-5)+5=27 \Leftrightarrow (m-5)(n-5)=-11$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=4$, $n=16$ sau $m=16$, $n=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\frac{8}{x}=$	**2p**
	$=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Cum $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$	**1p**
	$x\in(0,2] \Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$	**2p**
	$x\in[2,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2-8\ln x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{8\ln x}{x^2}\right)=+\infty$	**2p**
	Cum $f(2)<0$, ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\int_5^{10}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_5^{10}=$	**3p**
	$=\ln 10-\ln 5=\ln 2$	**2p**
b)	$g(x)=\frac{1}{x-4}$, deci $V=\pi\int_5^6 g^2(x)dx=\pi\int_5^6\frac{1}{(x-4)^2}dx=$	**2p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Big\vert_5^6=\frac{\pi}{2}$	**3p**
c)	Pentru $n>4$, $\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_n^{n+1}\frac{1}{x(x-4)}dx=\frac{1}{4}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\frac{n^2-3n}{n^2-3n-4}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)dx\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{4}{n^2-3n-4}\right)^{\frac{n^2-3n-4}{4}}\right)^{\frac{4n^2}{4\left(n^2-3n-4\right)}}=\ln e=1$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = 2016 + 2 \cdot 2 =$	**3p**
	$= 2020$	**2p**
2.	$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + m = 2$	**3p**
	$m = 1$	**2p**
3.	$2^{4x-6} = \left(2^2\right)^{3x-4} \Leftrightarrow 4x - 6 = 6x - 8$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 40 de elemente, deci sunt 40 de cazuri posibile	**1p**
	Numerele din mulțimea A care conțin cifra 4 sunt 4, 14, 24, 34 și 40, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$	**2p**
5.	$y - 2 = \frac{5-2}{4-1}(x-1)$	**3p**
	$y = x + 1$	**2p**
6.	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{3}{5}$	**3p**
	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -2 + 0 + 0 - 1 - (-1) - 0 = -2$	**3p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)$	**3p**
	Pentru orice număr real a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, obţinem $\det(A(a)) \neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 1$; pentru fiecare număr a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, soluția sistemului este de forma $\left(-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}, 0\right)$	**3p**
	Cum a este număr întreg, $\frac{1}{a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - 1$ este divizor al lui 1, deci $a = 0$ sau $a = 2$	**2p**

2.a)	$x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=$	**3p**
	$=3x(y+1)+3(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$f(x\circ y)=3(x\circ y)+3=3\big(3(x+1)(y+1)-1\big)+3=9(x+1)(y+1)=$	**3p**
	$=(3x+3)(3y+3)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$f\Big(\underbrace{a\circ a\circ\ldots\circ a}_{\text{de 2016 ori } a}\Big)=f\left(3^{2015}-1\right)\Leftrightarrow\left(f(a)\right)^{2016}=3\cdot\left(3^{2015}-1\right)+3\Leftrightarrow\left(f(a)\right)^{2016}=3^{2016}\Leftrightarrow f(a)=-3$ sau $f(a)=3$	**3p**
	$a=-2$ sau $a=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Cum $x\in(1,+\infty)$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)\Rightarrow f'(x)=\left(\ln(x+1)-\ln(x-1)\right)'=$	**2p**
	$=\left(\ln(x+1)\right)'-\left(\ln(x-1)\right)'=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$	**3p**
b)	$f''(x)=\dfrac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$	**2p**
	Pentru orice $x\in(1,+\infty)$, $f''(x)>0$, deci funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2)+f'(3)+\ldots+f'(n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}\right)\right)=$	**3p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)=-\dfrac{3}{2}$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2\sqrt{x}f(x)\,dx=\int_1^2(x+1)\,dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\,dx=2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big\|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=$	**3p**
	$=\left(2\sqrt{x}\cdot\ln x-4\sqrt{x}\right)\Big\|_1^{e^2}=4e-4e+4=4$	**2p**
c)	$\displaystyle V=\pi\int_1^a g^2(x)\,dx=\pi\int_1^a\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}+2x+\ln x\right)\right\|_1^a=\pi\left(\frac{a^2}{2}+2a+\ln a-\frac{5}{2}\right)$	**3p**
	$\pi\left(\dfrac{a^2}{2}+2a+\ln a-\dfrac{5}{2}\right)=\pi\left(\ln a+\dfrac{7}{2}\right)\Leftrightarrow a^2+4a-12=0$ și, cum $a>1$, obținem $a=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$24+a=2\cdot 1020$ $a=2016$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=16-4m$ $16-4m=0\Rightarrow m=4$	**3p** **2p**
3.	$\left(3^{-1}\right)^{2x-3}=3^3\Leftrightarrow -2x+3=3$ $x=0$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 25 de elemente, deci sunt 25 de cazuri posibile Sunt 5 numere raționale în mulțimea A, deci sunt 5 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$d\perp BC\Rightarrow m_d\cdot m_{BC}=-1$ și, cum $m_{BC}=1$, obținem $m_d=-1$ Deoarece $A\in d$, ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, adică $y=-x+1$	**2p** **3p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=$ $=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-0-1-0=-1$	**2p** **3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(3a-1)(a+1)$ Pentru orice număr real a, $a\neq-1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obținem $\det\left(A(a)\right)\neq0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p** **3p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a\neq-1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$; pentru fiecare număr real a, $a\neq-1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obținem $x_0=\dfrac{-4a}{(3a-1)(a+1)}$ și $y_0=\dfrac{2(2-3a)}{3a-1}$ Cum $x_0=y_0\Leftrightarrow 3a^2-a-2=0$, obținem $a=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=1$	**2p** **3p**

2.a)	$x * y = -xy + 2x + 2y - 4 + 2 =$	**2p**
	$= -x(y-2) + 2(y-2) + 2 = 2 - (x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x * x = 2 - (x-2)^2$	**2p**
	$2 - (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 3$	**3p**
c)	Cum $m * n * p = 2 + (m-2)(n-2)(p-2)$, obținem $(m-2)(n-2)(p-2) = 0$	**2p**
	$m = 2$ sau $n = 2$ sau $p = 2$, deci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(e^x\right)' + (\ln x)' + 1' =$	**2p**
	$= e^x + \frac{1}{x} + 0 = e^x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	**3p**
b)	$f(1) = e + 1$, $f'(1) = e + 1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = (e+1)x$	**3p**
c)	$f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(e^x + \ln x + 1\right) = -\infty$, $f(1) > 0$ și f este continuă, atunci ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică în intervalul $(0, 1)$	**3p**
2.a)	$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x+3} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{x+3}\right) dx = \left(x - 3\ln(x+3)\right)\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - 3\ln 4 + 3\ln 3 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$	**2p**
b)	$I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 3x^{n+1}}{x+3} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x+3)}{x+3} dx = \int_0^1 x^{n+1} dx =$	**3p**
	$= \frac{x^{n+2}}{n+2}\Big\vert_0^1 = \frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$nI_n = n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx = \int_0^1 \left(x^n\right)' \frac{x^2}{x+3} dx = x^n \cdot \frac{x^2}{x+3}\Big\vert_0^1 - \int_0^1 x^n \cdot \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} dx = \frac{1}{4} - \int_0^1 x^n \left(1 - \frac{9}{(x+3)^2}\right) dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Cum $0 \le \int_0^1 x^n \left(1 - \frac{9}{(x+3)^2}\right) dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n, obţinem $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = \frac{1}{4}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(\sqrt{2}-3\right)^2=11-6\sqrt{2}$	**2p**
	$\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11+6\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11-6\sqrt{2}+11+6\sqrt{2}=22$	**3p**
2.	$f(-1)=0$	**3p**
	$f(-1)f(0)f(1)=0$	**2p**
3.	$x^2-6x+6=1\Rightarrow x^2-6x+5=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=5$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 8	**2p**
	Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 3 moduri și, pentru fiecare alegere a acesteia, cifra sutelor poate fi aleasă în câte 2 moduri, deci se pot forma $3\cdot 2\cdot 1=6$ astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d=m_{AB}\Rightarrow m_d=1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=x$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$	**3p**
	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2+x\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&y^2+y\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y+x&y^2+y+2xy+x^2+x\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2+(x+y)\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=$ $=A\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right)=A\left(\frac{2016}{2017}\right)$	**3p**
	$A\left(\frac{2016}{2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)\Leftrightarrow a=2016$	**2p**

2.a)	$f(1)=0 \Leftrightarrow 1^4+m\cdot 1^2+2=0$	**2p**
	$m=-3$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3+x_4=0$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=0$, pentru orice număr real m	**3p**
c)	$f=X^4+3X^2+2=\left(X^2+1\right)\left(X^2+2\right)$	**3p**
	Polinoamele X^2+1 și X^2+2 au coeficienți reali, au gradul 2 și nu au rădăcini reale, deci sunt ireductibile în $\mathbb{R}[X]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$ și funcția f este continuă, atunci pentru orice $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int_0^2 e^x(x-1)e^{-x}dx=\int_0^2(x-1)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg\|_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{2}-2=0$	**2p**
b)	$\displaystyle\mathcal{A}=\int_1^2\left\|f(x)\right\|dx=\int_1^2(x-1)e^xdx=(x-2)e^x\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=0-(-1)e=e$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\int_{-n}^1 xe^xdx=(x-1)e^x\Big\|_{-n}^1=(n+1)e^{-n}$	**3p**
	$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{e^n}=0$	**2p**