. # Integrale- (SubIII-partea 2)

***Problema 1.***

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x$.

**a)** Arătaţi că $\int_1^2 3x^2 dx=7$.

**b)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției $f$ pentru care $F(1)=2014$.

**c)** Determinaţi numărul natural $n$, $n\geq 2$ ştiind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x}dx=\frac{13}{2}$.

***Problema 2.***

**2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-1$.

**a)** Arătaţi că $\int_0^1 e^x dx=e-1$.

**b)** Arătați că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.

**c)** Calculați $\int_0^1 F(x)dx$.

***Problema 3.***

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$.

**a)** Arătaţi că $\int_{-1}^1 (2x+1)dx=2$.

**b)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x-1$.

**c)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei $f$ este o funcţie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

***Problema 4.***

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

**a)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2dx=\dfrac{1}{3}$.

**b)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

**c)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei $f$ este funcţie crescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$.

***Problema 5.***

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$.

**a)** Arătaţi că $\int_1^e \dfrac{1}{x}dx=1$.

**b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**c)** Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria mai mică strict decât 4.

***Problema 6.***

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

**a)** Calculaţi $\int_4^5 xf(x)dx$.

**b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=4+\ln x$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**c)** Determinaţi numărul real $a$, $a>5$, pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţie $x=5$ şi $x=a$, este egală cu $\ln 3$.

***Problema 7.***

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x}$.

**a)** Calculaţi $\int_1^2\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx$.

**b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**c)** Calculaţi aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=2$.

**_Problema 8._**

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+1$.

**a)** Calculaţi $\int_0^1 f'(x)\,dx$.

**b)** Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3+x+1$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**c)** Calculaţi aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$.

**_Problema 9._**

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+9$.

**a)** Calculaţi $\int_1^2 f'(x)\,dx$.

**b)** Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{3}{2}+9\ln 2$.

**c)** Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^2$ este egal cu $81\pi$.

**_Problema 10._**

**2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2-x+1$.

**a)** Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x)+1\right)dx$.

**b)** Arătaţi că funcţia $F$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**c)** Determinaţi numărul natural nenul $n$, ştiind că $\int_0^n F(x)\,dx=\frac{n^3}{3}$.

**_Problema 11._**

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x, x\le 0 \\ \frac{x}{x+1}, x>0 \end{cases}$.

**a)** Demonstraţi că funcţia $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

**b)** Calculaţi $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$.

**c)** Determinaţi aria suprafeţei determinată de dreptele de ecuaţii $x=1, x=2$, axa $Ox$ şi graficul funcţiei $f$.

***Problema 12.***

**2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+2x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x+x^2+2014$.

**a)** Calculaţi $\int_1^2 \left(f(x)-e^x\right)dx$.

**b)** Arătaţi că funcţia $F$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**c)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)F(x)dx$.

***Problema 13.***

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+1$.

**a)** Calculaţi $\int_0^1 f'(x)dx$.

**b)** Arătaţi că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3+x+1$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**c)** Calculaţi aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$.

***Problema 14.***

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

**a)** Verificaţi dacă funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+x$ este o primitivă a funcţiei $f$.

**b)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$.

**c)** Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}+\ln 2$.