

Limite, derivate (SubIII-partea 1)

Problema 1.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$.

a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

b) Arătați că $f'(x) = e^x + f(x)$ pentru orice număr real x .

c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 0$.

Problema 2.

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{3}{4}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f .

Problema 3.

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$.

b) Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 3$, situat pe graficul funcției f .

Problema 4.

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln x$.

a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

b) Arătați că $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

Problema 5.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$.

a) Arătați că $f'(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f .

Problema 6.

1. Se consideră funcția $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 2} ((x-2)f(x))$.

Problema 7.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$.

c) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

Problema 8.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 7$.

a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -3$.

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x(2x+1)(3x+2)}$.

c) Demonstrați că $f(x) \geq 5$ pentru orice $x \in [-1, +\infty)$.

Problema 9.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b) Arătați că $f'(x) = -\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .

Problema 10.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

a) Arătați că $f'(x) = (x+1)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Verificați dacă $f''(x) + f(x) = 2f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) Arătați că funcția f are un punct de extrem.

Problema 11.

1. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

a) Arătați că $2\sqrt{x}f'(x) = 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) Verificați dacă dreapta de ecuație $y = \frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 4$, situat pe graficul funcției f .

c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

Problema 12.

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f .

Problema 13.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^3$.

a) Verificați dacă $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe \mathbb{R} .

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^2}$.

Problema 14.

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 10 - \frac{11}{x}$.

a) Verificați dacă $f'(x) = \frac{x^2 + 11}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.