. Polinoame- (SubII-partea 2)

Problema 1.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$.

a) Arătați că $f(1) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin $X - 1$.

c) Arătați că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -2$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Problema 2.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 1$.

a) Arătați că $f(1) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 1$.

c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Problema 3.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X$.

a) Calculați $f(1)$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$.

c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Problema 4.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X$.

a) Arătați că $f(-1) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + X$.

c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, știind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Problema 5.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Arătați că polinomul f se divide cu $X - 1$.

b) Calculați ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$.

c) Verificați dacă $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 13$.

Problema 6.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $m = 0$, calculați restul împărțirii polinomului f la $X - 1$.

b) Arătați că polinomul f este divizibil cu $X + 1$, pentru orice număr real m.

c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale.

Problema 7.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = mX^5 + nX$, cu $m, n \in \mathbb{Z}_5$.

a) Determinați $n \in \mathbb{Z}_5$ pentru care $f(\hat{1}) = m$.

b) Pentru $m = \hat{1}$ și $n = \hat{4}$, determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

c) Arătați că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

Problema 8.

2. Polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 5X + m$, cu $m \in \mathbb{R}$ are rădăcinile x_1, x_2 și x_3.

a) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

c) Arătați că determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

Problema 9.

2. Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2 + 7)X^2 + 4mX + 4$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

c) Pentru $m = -5$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

Problema 10.

2. Se consideră polinomul $f=\left(X^2-2X+1\right)^2-a^2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Ştiind că $a=0$ să se determine soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$.

b) Să se verifice că $f=\left(X^2-2X+1+a\right)\left(X^2-2X+1-a\right)$.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

Problema 11.

2. Se consideră ecuaţia $x^4-ax^3-ax+1=0$ cu soluţiile x_1,x_2,x_3,x_4, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=5$.

b) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei, pentru $a=1$.

c) Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuaţia admite cel puţin o soluţie număr întreg.

Problema 12.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-12X^2+35\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se arate că $f=\left(X^2-6\right)^2-1$.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

Problema 13.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=c=1$ şi $b=-1$ să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la X^2+1.

b) Să se determine numerele a, b, c ştiind că restul împărţirii polinomului f la X^2+1 este X, iar restul împărţirii polinomului f la $X-1$ este -1.

c) Să se demonstreze că dacă $a\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

Problema 14.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+2X^3+aX^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3,x_4.

a) Să se calculeze suma $x_1+x_2+x_3+x_4$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului f ştiind că $a=-1$, $b=-2$ şi $c=0$.

c) Ştiind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b=a-1$.