

Legi de compoziție- (SubII-partea 2)

Problema 1.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2(x + y - 1) - xy$.

a) Arătați că $1 * 2 = 2$.

b) Arătați că $x * 2 = 2 * x = 2$ pentru orice număr real x .

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = x$.

Problema 2.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Arătați că $0 \circ (-4) = -4$.

b) Arătați că $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$ pentru orice numere reale x și y .

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 12$.

Problema 3.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + xy$.

a) Arătați că $(-1) \circ 1 = -1$.

b) Arătați că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$ pentru orice numere reale x și y .

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x + 1) \circ (x - 3) = 4$.

Problema 4.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Arătați că $1 * 5 = 5$.

b) Arătați că $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$ pentru orice numere reale x și y .

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = x$.

Problema 5.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x * y = x + y - 2$.

a) Calculați $5 * (-5)$.

b) Arătați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.

c) Calculați $(-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3$.

Problema 6.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = x + y + 3$.

a) Calculați $2 \circ (-2)$.

b) Arătați că $e = -3$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.

c) Determinați numărul real x pentru care $2013 \circ (-2013) = x \circ x$.

Problema 7.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 1$.

a) Arătați că $x * 1 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = 4$.

c) Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, pentru care $C_n^1 * C_n^2 = 14$.

Problema 8.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Arătați că $x * y = 2(x - 3)(y - 3) + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că legea „ $*$ ” este asociativă.

c) Calculați $1 * 2 * \dots * 2011$.

Problema 9.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.

a) Arătați că legea „ $*$ ” este asociativă.

b) Determinați elementul neutru al legii „ $*$ ”.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 * 2 = x * 4$.

Problema 10.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$.

a) Să se verifice că $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Știind că legea de compoziție „ \circ ” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei

$$E = (-2008) \circ (-2007) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \dots \circ 2008.$$

Problema 11.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7(x + y) + 42$.
- a) Să se calculeze $\sqrt{2} \circ (-\sqrt{2})$.
 - b) Să se verifice că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
 - c) Știind că legea de compoziție „ \circ ” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

Problema 12.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$.
- a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = x * x$.
 - b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x .
 - c) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 13.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x * y = xy - 5(x + y) + 30$.
- a) Să se demonstreze că $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
 - c) Știind că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă să se rezolve în mulțimea \mathbb{R} ecuația $x * x * x = x$.

Problema 14.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție $x * y = (x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$.
- a) Să se rezolve ecuația $x * x = x$.
 - b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
 - c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.