MATRICE, DETERMINANȚI

Problema 1.

1. Se consideră determinanţii $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ şi $D(a) = \begin{vmatrix} 4-a & a-1 \\ a+1 & 4-a \end{vmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătaţi că $d = 1$.

b) Determinaţi numărul real a pentru care $D(a) = 1$.

c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1), B(2,4)$ şi $C(3,m)$. Determinaţi numerele reale m ştiind că $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$.

Problema 2.

2. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $A(2) + A(-2)$.

b) Determinați numerele reale p și q pentru care $A(2) \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) Arătați că matricea $A(x)$ este inversabilă pentru orice număr întreg x.

Problema 3.

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.

b) Determinați numărul real x, știind că $A \cdot A = xA$.

c) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A + aI_2) = 0$.

Problema 4.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.

b) Determinați numerele reale p pentru care $A \cdot A = pA$.

c) Determinați matricele $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, știind că $\det(A + B) = 0$, unde b este un număr real.

Problema 5.

1. Se consideră determinantul $D(m)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix}$, unde m este număr real.

a) Calculați $D(0)$.

b) Arătați că $D(m)=(m+2)(m+3)$, pentru orice număr real m.

c) Determinați numerele naturale n pentru care $D(n^2-3n)=0$.

Problema 6.

2. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $A(-1)+A(1)=2A(0)$.

b) Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=5I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X=4A(2)$.

Problema 7.

2. Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix} 1+3a & -6a \\ a & 1-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $X(-1)+X(1)=2X(0)$.

b) Arătați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $X(a)$ este inversabilă.

Problema 8.

1.Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că matricea A este inversabilă.

b) Verificaţi dacă $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

c) Rezolvaţi ecuaţia $X\cdot A=B$, $X\in M_3(\mathbb{R})$.

Problema 9.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}3 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătaţi că $\det A=0$.

b) Determinaţi numărul real x ştiind că $B+C=A$.

c) Arătaţi că $B\cdot B+B=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Problema 10.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det A=-1$.

b) Arătaţi că $2A\cdot B-B\cdot A=I_2$.

c) Determinaţi numărul real x ştiind că $A\cdot A-xA=I_2$.

Problema 11.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că $\det A=0$.

b) Arătaţi că $A\cdot A=5A$.

c) Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=I_2$.

Problema 12.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, unde b este număr real.

a) Arătaţi că $\det A=-2$.

b) Determinaţi numărul real b pentru care $A+B=AB+C$.

c) Arătaţi că $\det(B+2C)=\det B-\det A$ pentru orice număr real b.

Problema 13.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

a) Arătaţi că $\det B=-5$.

b) Arătați că $\det A\neq 0$ pentru orice număr întreg a.

c) Determinați numărul întreg a știind că inversa matricei A are toate elementele numere întregi.